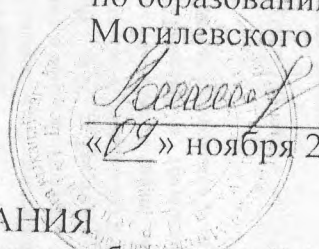


УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома


А.Б.Заблоцкий
«19» ноября 2021 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 27 ноября 2021 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 14.30.

VIII класс

1. Можно ли натуральные числа 1, 2, ..., 15 разбить на две группы так, чтобы в первой группе было 2 числа, во второй – 13 чисел и произведение чисел первой группы было равно сумме чисел второй группы?

2. Имеется 12 лампочек. Возле каждой лампочки находится кнопочный выключатель. Каждое нажатие кнопки выключателя меняет состояние лампочки с выключенного на включенное и наоборот. Первоначально все лампочки выключены. За один ход разрешается нажать кнопки пяти различных выключателей. Какое наименьшее количество ходов необходимо, чтобы все лампочки оказались включенными?

3. На сколько частей делят координатную плоскость линии, состоящие из точек, координаты, которых удовлетворяют уравнению $x^3y(x+y+1) = xy^3(x+y+1)$?

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой. Точка M – середина гипотенузы AB . Точка K лежит на катете AC . Доказать, что если $AK=2KC$, то $KB=2KM$.

5. На осенних каникулах в городе проводились два турнира по футболу между командами десяти школ. В первом турнире участвовали команды, составленные из мальчиков, во втором – команды, составленные из девочек. В обоих турнирах каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. По окончании турниров оказалось, что команда мальчиков школы №1 чаще выигрывала, чем проигрывала, а команда девочек школы №1 чаще проигрывала, чем выигрывала. При этом ни в турнире мальчиков, ни в турнире девочек, никакая другая команда не набрала очков столько же, сколько команда школы №1.

А) Какое самое низкое место на турнире могла занять команда мальчиков школы №1?

Б) Какое самое высокое место на турнире могла занять команда девочек школы №1?

В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

1. Решение:

Пусть для первой группы выбраны числа x и y ($x < y$). Тогда $x + y = 1 + 2 + \dots + 15 - x - y = 120 - x - y$ или $(x+1)(y+1) = 121$. Следовательно, $x+1 = 1$ и $y+1 = 121$ или $x+1 = y+1 = 11$, что невозможно.

Ответ: нельзя.

2. Решение:

Пусть все лампочки оказались включенными после n ходов. Тогда все было произведено $5n$ нажатий кнопки. При этом каждый из 12 выключателей должен быть нажат нечетное число раз. Общее число нажатий будет четным, т.е. n – четное.

Пусть $n=2$. Однако за 2 хода можно включить максимум 10 лампочек.

Пусть $n=4$. Покажем, что за 4 хода можно включить все лампочки.

Ход 1: нажимаем кнопки 1, 2, 3, 4, 5.

Ход 2: нажимаем кнопки 6, 7, 8, 9, 10.

Ход 3: нажимаем кнопки 7, 8, 9, 10, 11.

Ход 4: нажимаем кнопки 7, 8, 9, 10, 12.

Ответ: 4 хода.

3. Решение:

Выполним преобразования: $x^3 y(x+y+1) = xy^3(x+y+1)$;

$$x^3 y(x+y+1) - xy^3(x+y+1) = 0;$$

$$xy(x^2 - y^2)(x+y+1) = 0;$$

$$xy(x-y)(x+y)(x+y+1) = 0.$$

Исходному уравнению будут удовлетворять точки, для координат которых выполняется одно из условий: $x=0$, $y=0$, $x-y=0$, $x+y=0$, $x+y+1=0$. Это будут точки, лежащие на одной из прямых: $x=0$, $y=0$, $y=x$, $y=-x$, $y=-1-x$.

Несложно построить эти прямые и посчитать, что они делят координатную плоскость на 12 частей.

Ответ: 12 частей.

4. Доказательство:

Отразим треугольник ABC относительно прямой AC .

Пусть точка B перейдет в точку D . Получим треугольник ADC , равный треугольнику ABC . Треугольник DAB будет равнобедренным с боковыми сторонами AD и AB и медианой AC . Если $AK=2KC$, то точка K – является точкой пересечения медиан треугольника DAB . Проведем в треугольнике две другие медианы: DM и BL . Так как треугольник DAB равнобедренный, $DM=BL$. Далее, имеем:

$$KM = \frac{1}{2} DK = \frac{1}{3} DM = \frac{1}{3} BL \cdot KB = \frac{2}{3} BL \cdot откуда KB=2KM.$$

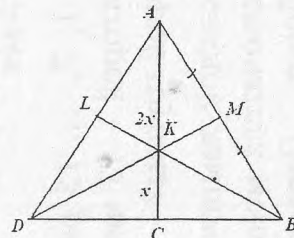
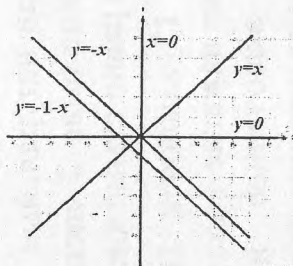
Что и требовалось доказать.

5. Решение:

А) Покажем, что команда мальчиков школы №1 могла занять последнее десятое место. Пусть эта команда одну игру выиграла. Остальные свела вничью. Тогда она наберет $3+8=11$ очков. Расположим остальные 9 команд по кругу. Пусть каждая команда побеждает следующие 4 команды, находящиеся за ней по ходу часовой стрелки, и проигрывает четырем командам, следующим за ней против хода часовой стрелки. Тогда каждая из оставшихся 9 команд, даже без учета игр с командой школы №1, 4 раза выигрывает и 4 раза проигрывает и наберет 12 очков.

Б) Покажем, что команда девочек школы №1 могла занять первое место, набрав при этом больше всех очков. Если команда школы №1 из 9 игр выигрывает 4 игры и проигрывает 5 игр, то она наберет 12 очков. Если все остальные игры турнира закончатся вничью, то 5 команд, обыгравших команду школы №1, наберут по $3+1 \cdot 8=11$ очков. 4 команды, проигравшие команде школы №1, наберут по 8 очков. Таким образом, команда школы №1 занимает первое место.

Ответ: а) 10 место; б) 1 место.



то

Оценка олимпиадных заданий
по математике

Каждая задача оценивается 8 баллами.

Максимальное количество баллов за правильное выполнение заданий – 40.

Критерии оценки олимпиадных заданий:

Степень выполнения задания	Количество баллов
Задача решена полностью (решение может отличаться от авторского)	8
Задача решена с недочетами или не все обоснования выполнены полностью	5 – 7
Задача решена наполовину	4
Правильно высказана идея, но ученик не смог ее реализовать	1 – 2
При решении допущены грубые ошибки	1 – 3
Дан правильный ответ, но нет решения	1
Учащийся только приступил к решению	1 – 2
Учащийся сделал несколько правильных шагов. Нужно смотреть степень продвижения в решении	2–7