

### ЗАДАНИЕ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады  
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 26 ноября 2022 г.  
Время выполнения задания: 10.00 – 14.30.

### VIII класс

1. Пусть  $a, b, c, d$  – действительные числа, такие, что  $a > \frac{1}{2}, c > \frac{1}{2}$  и  $a + b \leq c + d, a^2 + b^2 > c^2 + d^2$ . Сравните числа  $a$  и  $c$ .

2. В 8 «А» классе учатся одинаковое число мальчиков и девочек, а всего учащихся в этом классе на одного меньше, чем в 8 «Б» классе. Каждый мальчик любого из этих классов дружит ровно с тремя учащимися другого класса, а каждая девочка любого из этих классов дружит ровно с четырьмя учащимися из другого класса. На сколько больше мальчиков, чем девочек, учатся в 8 «Б» классе?

3. Никита задумал нецелое положительное число. Затем он умножил его на 50. К полученному произведению он добавил 1009 и результат разделил на 101. В итоге у него получилось наибольшее из целых чисел, которые меньше задуманного числа. Какое число задумал Никита?

4. Дан прямоугольник  $ABCD$ . Точка  $M$  – середина стороны  $AB$ . На отрезке  $MD$  отмечена точка  $N$  так, что  $CH \perp MD$ . Доказать, что  $\angle BNC = \angle MDC$ .

5. Мушкетеры Атос, Портос, Арамис и Д'Артаньян решили устроить турнир на шпалах возле монастыря Дешо. По условиям турнира каждый мушкетер должен провести два поединка. По воле жребия Атос должен был встретиться с Портосом и Д'Артаньяном, Портос – с Атосом и Арамисом, Арамис – с Портосом и Д'Артаньяном, Д'Артаньян – с Атосом и Арамисом. Перед началом турнира капитан королевских мушкетеров Де Тревиль должен выдать каждому мушкетеру плаш. У Де Тревиля имеется плаш трех цветов: белого, синего и красного (имеется не менее 4 плашей каждого цвета). Сколькими способами Де Тревиль может раздать плаши мушкетерам так, чтобы участники каждого поединка были одеты в плаши разного цвета?

Поскольку время ограничено, не разрешается

1. **Решение:** Складывая неравенство  $a + b \leq c + d$  с неравенством  $c^2 + d < a^2 + b$ , получим  $c^2 + a < a^2 + c$ , или  $a - c < a^2 - c^2$ , или  $0 < (a - c)(a + c - 1)$ . Поскольку  $a > \frac{1}{2}$  и  $c > \frac{1}{2}$ , то  $a + c - 1 > 0$ . Тогда из последнего неравенства следует, что  $0 < a - c$ , или  $a > c$ .

**Ответ:**  $a > c$ .

2. **Решение:** Пусть в 8 «А» классе учатся  $k$  девочек и  $k$  мальчиков, а в классе 8 «Б» учатся  $d$  девочек и  $m$  мальчиков. Тогда по условию  $2k = m + d - 1$ . Далее, так как каждый мальчик из 8 «Б» класса дружит с тремя, а каждая девочка с четырьмя учащимися из 8 «А» класса, то число «дружественных пар» равно  $3m + 4d$ . С другой стороны, мальчики и девочки из 8 «А» класса участвуют в  $3k + 4k = 7k$  «дружественных парах». Получаем уравнение  $3m + 4d = 7k = \frac{7}{2}(m + d - 1)$ , или  $bm + 8d = 7m + 7d - 7$ , откуда  $m - d = 7$ , то есть в 8 «Б» классе мальчиков на 7 больше, чем девочек.

**Ответ:** мальчиков на 7 больше, чем девочек.

3. **Решение:** Пусть Никита задумал нецелое положительное число  $x$ . Пусть  $n$  – наибольшее целое число, меньшее  $x$ . Легко видеть, что  $0 < x - n < 1$ .

Из условия задачи следует, что  $n = \frac{50x + 1009}{101}$ . Откуда  $x = \frac{101n - 1009}{50}$ .

Тогда  $x - n = \frac{101n - 1009}{50} - n = \frac{51n - 1009}{50}$ . Неравенство  $0 < x - n < 1$  примет вид:  
 $0 < \frac{51n - 1009}{50} < 1$  или  $0 < 51n - 1009 < 50$ .

Тогда  $x = \frac{101 \cdot 20 - 1009}{50} = 20,22$ .

**Ответ:** 20,22.

4. **Решение:** Если докажем, что  $BH = BC$ , то из равнобедренного треугольника  $BHC$  следует, что  $\angle BNC = \angle BHC$ . И тогда  $\angle MDC = \angle NDC = 90^\circ - \angle HCD$ .  $\angle BNC = \angle BHC = 90^\circ - \angle HCD$ .

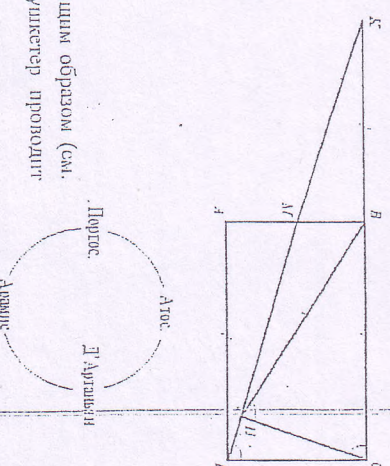
И получаем, что  $\angle BNC = \angle MDC$ .

Остается доказать, что  $BH = BC$ . Продолжим отрезки  $CB$  и  $DM$  за точки  $B$  и  $M$  соответственно. Пусть  $K$  – точка пересечения прямых  $CB$  и  $DM$ . Из равенства прямоугольных треугольников  $KBM$  и  $DAM$  следует, что  $KB = AD = BC$ . Отрезок  $NB$  – медиана прямоугольного треугольника  $KNC$ . Таким образом,  $NB = \frac{1}{2} KC = BC$ .

**Что и требовалось доказать.**

5. **Решение:**

Расположим мушкетеров по кругу следующим образом (см. рисунок). При таком расположении каждый мушкетер проведет





последники с обоями своими соседями. Исходную задачу можно переформулировать: сколькими способами можно раздать плащи четырем мушкетерам, стоящим по кругу так, что любые два соседних мушкетера были одеты в плащи разного цвета?

Д'Артаньяну можно выдать плащ тремя способами. Не нарушая общности рассуждений, положим, что Д'Артаньяну дали красный плащ. Рассмотрим Пюросе, стоящего напротив Д'Артаньяна.

Если у Пюросе также красный плащ, то каждому из двух оставшихся мушкетеров можно выдать плащ двумя способами. В этом случае получаем  $2+2=4$  способа.

Пусть теперь у Пюросе не красный плащ (т.е. синий или белый). Тогда Атосу и Арамису можно выдать плащи одним способом: цвета, отличного от цветов плащей Д'Артаньяна и Пюросе. В этом случае имеем 2 способа, соответствующие возможным цветам плаща Пюросе.

Итак, если у Д'Артаньяна красный плащ, то существует  $4+2=6$  способов раздачи плащей мушкетерам. Столько же способов получим для белого и синего плащей Д'Артаньяна. Всего будет  $6 \cdot 3=18$  способов.

*Ответ: 18 способов.*

последники с обоями своими соседями. Исходную задачу можно переформулировать: сколькими способами можно раздать плащи четырем мушкетерам, стоящим по кругу так, что любые два соседних мушкетера были одеты в плащи разного цвета?

Д'Артаньяну можно выдать плащ тремя способами. Не нарушая общности рассуждений, положим, что Д'Артаньяну дали красный плащ. Рассмотрим Пюросе, стоящего напротив Д'Артаньяна.

Если у Пюросе также красный плащ, то каждому из двух оставшихся мушкетеров можно выдать плащ двумя способами. В этом случае получаем  $2+2=4$  способа.

Пусть теперь у Пюросе не красный плащ (т.е. синий или белый). Тогда Атосу и Арамису можно выдать плащи одним способом: цвета, отличного от цветов плащей Д'Артаньяна и Пюросе. В этом случае имеем 2 способа, соответствующие возможным цветам плаща Пюросе.

Итак, если у Д'Артаньяна красный плащ, то существует  $4+2=6$  способов раздачи плащей мушкетерам. Столько же способов получим для белого и синего плащей Д'Артаньяна. Всего будет  $6 \cdot 3=18$  способов.

*Ответ: 18 способов.*