

УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома

 А.Б.Заблоцкий
«19» октября 2023 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

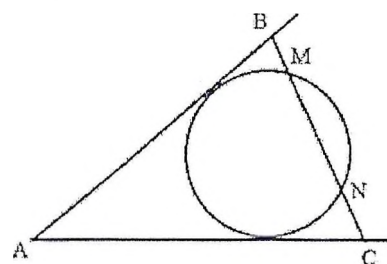
Дата проведения: 1 ноября 2023 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

IX класс

1. Через начало координат точку O и точку $K(0; a)$, лежащую на оси ординат выше начала координат, проведены две прямые, параллельные прямой $y=x+2023$. Первая прямая пересекает график функции $y=x^2$ в точках O и A , вторая прямая пересекает график функции $y=x^2$ в точках B и C . Найти ординату точки K , если площадь трапеции $OABC$ равна $4a$.

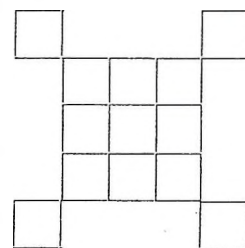
2. В угол BAC вписана окружность. Прямая BC пересекает эту окружность в точках M и N (порядок следования точек: B, M, N, C). Доказать, что если $BM > CN$, то $AB > AC$.



3. Натуральное число n имеет 6 делителей. Известно, что сумма трех наибольших его делителей равна 2431. Найти все такие n .

4. В каждую клетку таблицы размера $4 \times n$ (4 строки, n столбцов) записано одно из целых чисел от 0 до 5. При каком наибольшем значении n в таблицу можно записать числа таким образом, чтобы во всех строках сумма чисел была одинакова, а в любых двух столбцах различна?

5. На рисунке изображен план города. Городские кварталы имеют форму одинаковых квадратов. Стороны квадратов являются улицами. Длина каждой стороны квадрата (улицы) равна 1 км. Автомобилист хочет, выехав из какой-либо точки на одной из улиц города (по его выбору), проехать по каждой улице города не менее одного раза и в итоге вернуться в ту же точку. Какую наименьшую длину может иметь такой маршрут?



от 0 до 20. Тогда сумма всех чисел в таблице равна $0+1+2+\dots+20=\frac{1+20}{2}\cdot 20=210$. Тогда сумма чисел в каждой из 4 строк равна $210:4=52.5$ – не целое число. Противоречие. Поэтому n не превышает 20.

Приведем пример таблицы 4×20 , удовлетворяющей требованиям задачи.

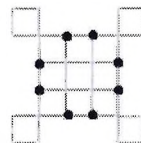
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |

Ответ: 20.

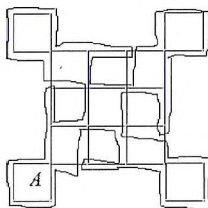
5. Решение:

Способ 1.

Несложно подсчитать, что всего в городе 40 улиц длиной 1 км. Вершины квадратов назовем перекрестками. Заметим, что к восьми перекресткам (они отмечены точками) подходит нечетное число улиц. По одной из улиц, подходящих к такому перекрестку, автомобилисту придется проехать дважды. Поскольку отрезок соединяет два перекрестка, лишних проездов будет не менее $8:2=4$. Итого весь путь составит не меньше $40+4=44$ км.



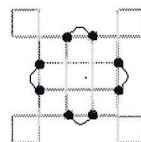
Пример на рисунке показывает, что путь такой длины возможен. Начало маршрута – точка А.



Ответ: 44 км.

Способ 2.

Рассмотрим план города как граф, у которого перекрестки являются вершинами, а улицы ребрами. Тогда данный граф имеет 40 ребер. При том 8 вершин имеют нечетную степень, равную 3. Добавим в граф 4 ребра, соединив четыре пары вершин с нечетной степенью (см. рис). Теперь в графе 44 ребра и степени всех вершин четны. Согласно теореме Эйлера существует цикл, содержащий все ребра графа по одному разу. Поскольку длина каждого ребра равна 1 км, то длина соответствующего маршрута будет равна 44 км. Заметим, что при добавлении к исходному графу менее четырех ребер в нем останется вершина нечетной степени и требуемого цикла не будет.



Ответ: 44 км.

Замечание: При решении задачи вторым способом приводить пример требуемого цикла не обязательно. Теорема Эйлера доказывает его существование.

Оценка олимпиадных заданий
по математике

Каждая задача оценивается **8** баллами.


Максимальное количество баллов за правильное выполнение заданий – **40**.

Критерии оценки олимпиадных заданий:

| <i>Степень выполнения задания</i> | <i>Количество баллов</i> |
|--|--------------------------|
| Задача решена полностью (решение может отличаться от авторского) | 8 |
| Задача решена с недочетами или не все обоснования выполнены полностью | 5 – 7 |
| Задача решена наполовину | 4 |
| Правильно высказана идея, но ученик не смог ее реализовать | 1 - 2 |
| При решении допущены грубые ошибки | 1 – 3 |
| Дан правильный ответ, но нет решения | 1 |
| Учащийся только приступил к решению | 1 – 2 |
| Учащийся сделал несколько правильных шагов. Нужно смотреть степень продвижения в решении | 2– 7 |

УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома

 А.Б.Заблоцкий
«18» октября 2023 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

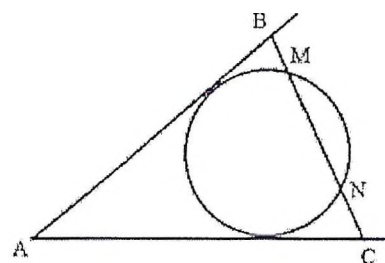
Дата проведения: 1 ноября 2023 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

IX класс

1. Через начало координат точку O и точку $K(0; a)$, лежащую на оси ординат выше начала координат, проведены две прямые, параллельные прямой $y=x+2023$. Первая прямая пересекает график функции $y=x^2$ в точках O и A , вторая прямая пересекает график функции $y=x^2$ в точках B и C . Найти ординату точки K , если площадь трапеции $OABC$ равна $4a$.

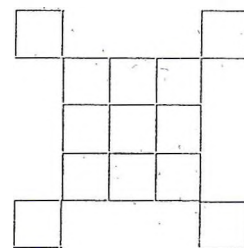
2. В угол BAC вписана окружность. Прямая BC пересекает эту окружность в точках M и N (порядок следования точек: B, M, N, C). Доказать, что если $BM > CN$, то $AB > AC$.



3. Натуральное число n имеет 6 делителей. Известно, что сумма трех наибольших его делителей равна 2431. Найти все такие n .

4. В каждую клетку таблицы размера $4 \times n$ (4 строки, n столбцов) записано одно из целых чисел от 0 до 5. При каком наибольшем значении n в таблицу можно записать числа таким образом, чтобы во всех строках сумма чисел была одинакова, а в любых двух столбцах различна?

5. На рисунке изображен план города. Городские кварталы имеют форму одинаковых квадратов. Стороны квадратов являются улицами. Длина каждой стороны квадрата (улицы) равна 1 км. Автомобилист хочет, выехав из какой-либо точки на одной из улиц города (по его выбору), проехать по каждой улице города не менее одного раза и в итоге вернуться в ту же точку. Какую наименьшую длину может иметь такой маршрут?



**Математика
IX класс. Решения.**

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. Решение:

Из условия следует, что уравнение прямой OA имеет вид $y=x$, уравнение прямой BC имеет вид $y=x+a$, где $a>0$. Требуется найти значение a .

Легко видеть, что прямая BC пересекает ось Ox в точке $P(-a; 0)$.

Площадь трапеции $OABC$ найдем по формуле

$$S = \frac{OA+BC}{2} \cdot OH, \text{ где } OH - \text{высота трапеции.}$$

Заметим, что высота OH трапеции $OABC$ равна высоте треугольника POK , проведенной из вершины O ,

$$\text{т.е. } OH = \frac{PO \cdot OK}{PK}.$$

$$OK=OP=a; \text{ т.к. } \angle KOP=90^\circ, \text{ то } PK = \sqrt{2}KO = \sqrt{2}a.$$

$$\text{Тогда } OH = \frac{a \cdot a}{\sqrt{2}a} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Координаты точки A найдем из уравнения $x^2 = x$, где $x \neq 0$. Откуда $x=1$ и $OA=\sqrt{2}$ (прямая OA образует с осью Ox угол 45°).

Найдем длину стороны BC . Пусть точки B и C имеют следующие координаты: $B(b; b^2)$, $C(c; c^2)$. Тогда длина проекции отрезка BC на ось Ox равна $|b-c|$ и, поскольку прямая BC образует с осью Ox угол 45° , то $BC=\sqrt{2}|b-c|$.

Далее, точки B и C являются точками пересечения прямой $y=x+a$ и параболы $y=x^2$, то числа b и c являются корнями уравнения $x^2 = x + a$, $x^2 - x - a = 0$.

$$b+c=1, bc=-a.$$

$$|b-c|^2 = (b+c)^2 - 4bc = 1 + 4a. \quad |b-c| = \sqrt{1+4a}.$$

$$\text{Отсюда } BC = \sqrt{1+4a} \cdot \sqrt{2}.$$

$$\text{Тогда площадь трапеции } OABC \text{ равна } S = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+4a} \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2} (1 + \sqrt{1+4a});$$

$$\frac{a}{2} (1 + \sqrt{1+4a}) = 4a;$$

$$1 + \sqrt{1+4a} = 8;$$

$$\sqrt{1+4a} = 7;$$

$$1 + 4a = 49;$$

$$a=12.$$

Ответ: $a=12$.

2. Решение:

Пусть P и Q — точки касания окружности со сторонами AB и AC соответственно. Заметим, что $AP=AQ$.

Далее, имеем:

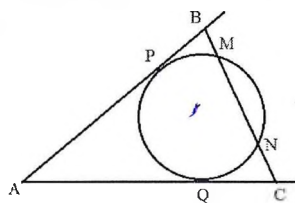
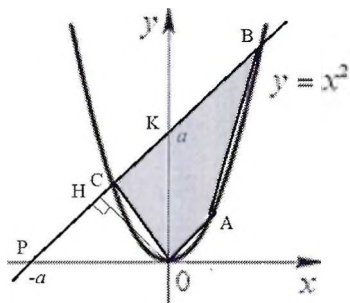
$$BM \cdot BN = BP^2,$$

$$CN \cdot CM = CQ^2.$$

$$BM \cdot (BC - CN) = (AB - AP)^2,$$

$$CN \cdot (BC - BM) = (AC - AQ)^2.$$

Обозначим $AP=AQ=v$, $BC=a$.



$$BM \cdot (a - CN) = (AB - v)^2$$

$$CN \cdot (a - BM) = (AC - v)^2$$

Вычтем второе равенство из первого:

$$BM \cdot (a - CN) - CN \cdot (a - BM) = (AB - v)^2 - (AC - v)^2$$

$$a \cdot BM - BM \cdot CN - a \cdot CN + CN \cdot BM = AB^2 - 2vAB + v^2 - AC^2 + 2vAC - v^2$$

$$a \cdot BM - a \cdot CN = AB^2 - 2vAB - AC^2 + 2vAC$$

$$a \cdot (BM - CN) = AB^2 - AC^2 - 2v(AB - AC)$$

$$a \cdot (BM - CN) = (AB - AC)(AB + AC) - 2v(AB - AC)$$

$$a \cdot (BM - CN) = (AB - AC)(AB + AC - 2v)$$

Если $BM > CN$, то $a \cdot (BM - CN) > 0$, тогда и $(AB - AC)(AB + AC - 2v) > 0$.

Поскольку $AB > AP = v$ и $AC > AQ = v$, то $AB + AC - 2v > 0$. Значит, $AB - AC > 0$, т.е. $AB > AC$.

Что и требовалось доказать.

3. Решение:

При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число n имеет следующее разложение на простые множители

$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, где p_1, p_2, \dots, p_k – различные простые делители числа n . Тогда количество

делителей числа n (обозначается $d(n)$) выражается формулой $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$.

Искомое число n имеет 6 делителей, а поскольку $6 = 5 + 1$ или $6 = (1+1) \cdot (2+1)$, то оно может иметь следующее разложение на простые множители: $n = p^5$, или $n = pq^2$, где p и q – различные простые числа.

1) Пусть $n = p^5$. Тогда делители числа n имеют вид $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$. По условию задачи имеем: $p^5 + p^4 + p^3 = 2431$. При $p=3$ левая часть последнего уравнения меньше 2431, а при $p=5$ она уже больше 2431. Поэтому данное уравнение решений в простых числах не имеет.

2) Пусть $n = pq^2$. Тогда делители числа n : $1, p, q, q^2, pq, pq^2$. В число трех наибольших делителей войдет pq^2 , число pq ($pq > p, pq > q, pq > 1$), также одно из чисел q^2 или p . Рассмотрим оба случая.

$$2.1) q^2 > p.$$

$$q^2 + pq + pq^2 = 2431; \quad q(q + p + pq) = 2431.$$

Несложно заметить, что число 2431 делится на 11: $(2+3) - (4+1) = 0$. Далее, легко получаем: $2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$.

$$q(q + p + pq) = 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

Простое число q может принимать одно из значений: 11, 13, 17.

Если $q=11$, то $11+p+11p=13 \cdot 17$, p – не целое.

Если $q=13$, то $13+p+13p=11 \cdot 17$, p – не целое.

Если $q=17$, то $17+p+17p=11 \cdot 13$, $p = 7$. Тогда $n = 7 \cdot 17^2 = 2023$.

$$2.2) q^2 < p.$$

$$p + pq + pq^2 = 2431; \quad p(1 + q + q^2) = 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

Простое число p может принимать одно из значений: 11, 13, 17.

Если $p=11$, то $1 + q + q^2 = 13 \cdot 17$, q – не целое.

Если $p=13$, то $1 + q + q^2 = 11 \cdot 17$, q – не целое.

Если $p=17$, то $1 + q + q^2 = 11 \cdot 13$, q – не целое.

Итак, единственным значением n , удовлетворяющим условию задачи, является число 2023.

Ответ: 2023.

4. Решение:

Сумма чисел в одном столбце может принимать значения от $0+0+0+0=0$ до $5+5+5+5=20$, т.е. 21 различное значение. Таким образом, значение n не может превышать 21. Докажем, однако, что n не может быть равным 21. Если $n=21$, то среди сумм чисел по столбцам найдутся все числа